

BAREM clasa a9a:

SUBIECTUL 1

Fie $m > n$ si $f : R_+ \rightarrow R, f(x) = nx^m - mx^n + m - n$.

Avem $f(1) = 0$2p

Cu inegalitatea mediilor pentru $x \neq 1$ si $x \geq 0$ obtinem $\frac{nx^m + m - n}{\underbrace{x^m + x^m + x^m + \dots + x^m}_{denori} + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{de(m-n)ori}} > m \sqrt[m]{x^m \cdot \dots \cdot x^m \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} =$

$mx^n \Rightarrow f(x) > 0$3p

Asadar, $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$, cu egalitate doar pentru $x = 1$1p

Daca $(x; y; z)$ este o solutie a sistemului cu $x, y, z \geq 0$ deducem ca $f(x) + f(y) + f(z) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) = f(z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$1p

SUBIECTUL 2

Vom folosi doua perechi de cercuri concentrice care se intersecteaza in 8 puncte. Conform ipotezei vor rezulta doua triunghiuri echilaterale care se vor intersecta in 8 puncte.(Fals!) Rezulta ca nu exista o asemenea functie.

Punctarea se va face in functie de corectitudinea rezolvarii

SUBIECTUL 3

Folosim inegalitatea lui Bernoulli pentru numerele k^p , p fiind par:

$$k^p = (1 + (k - 1))^p \geq 1 + p(k - 1)$$

cu egalitate pentru $k-1=0, k=1$2p

Aplicam inegalitatea pentru numerele a_i^{2i} :

$$a_1^2 \geq 1 + 2(a_1 - 1)$$

$$a_2^4 \geq 1 + 4(a_2 - 1)$$

...

$$a_n^{2n} \geq 1 + 2n(a_n - 1)$$

Adunand obtinem:

$$a_1^2 + a_2^4 + \dots + a_n^{2n} \geq 1 + 2(a_1 - 1) + 1 + 4(a_2 - 1) + \dots + 1 + 2n(a_n - 1) \dots \dots \dots 3p$$

Efectuand calculele ajungem la:

$$a_1^2 + a_2^4 + \dots + a_n^{2n} \geq 2(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n) - n^2 \dots \dots \dots 1p$$

Cum aceasta inegalitate e valabila pentru orice numere,rezulta ca solutia ecuatiei este data de egalitate.Aceasta obtinandu-se pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 \dots \dots \dots 1p$

SUBIECTUL 4

Fie multimea $M = \{2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}\}$ si V multimea functiilor $f : M \rightarrow \{-1, 1\}$
 Pentru k de la 1 la $2^n - 1$ multimile A sunt de forma $\{x \in M, f \in V | x \cdot f(x)\}$
 Punctarea se va face de la 0 la 7 in functie de corectitudinea rezolvarii.

SUBIECTUL 5

Directa.

Vom da un contraexemplu.

Luam un hexagon regulat cu varfurile rosi iar intersectia diagonalelor va fi colorata cu albastru.Singura varianta de a face triunghi echilateral asemenea cu T e ca acesta sa aiba doua puncte rosi, contradictie.

Reciproca.

Fie A si R doua puncte, A =albastru si R =ros astfel incat distanta AR sa fie minima.Fie X un punct in plan astfel incat triunghiul XAR sa fie asemenea cu T iar AR sa fie latura maxima.

Avem cazurile:

XAR -triunghi oarecare.Atunci $XA < AR$ si $XR < AR$ rezulta X e alb.

XAR -triunghi isoscel de baza AR .La fel ca mai sus, X e alb.

XAR -tiunghi isoscel de baza XA sau XR .Vom lua baza XA (celalalt caz fiind analog)

$XA=AR$ rezulta ca $XR < AR$ rezulta ca X nu poate fi albastru.

Fie Y simetricul lui X fata de mediatoarea segmentului AR .Avem $YR=AR$ si $YA < AR$ rezulta ca Y nu poate fi ros.

Cum unghiurile R si A au mai putin de 90 grade rezulta ca $XY < AR$ rezulta ca X sau Y este alb.

Asadar oricare ar fi T exista un triunghi asemenea cu T care sa aiba varfurile in puncte colorate diferit

Se acorda de la 0 la 7 puncte in functie de corectitudinea rezolvarii

SUBIECTUL 6

$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) < \frac{n(n-1)}{2}$ ceea ce inseamna ca exista i diferit de j astfel incat $a_{i+1} - a_i = a_{j+1} - a_j$, k si l fiind a_{i+1} si a_{j+1}
Se vor acorda de la 0 la 7 puncte in functie de corectitudinea rezolvarii

Daca se va folosi alta metoda in rezolvarea subiectelor, alta decat cea prezentata in acest barem, se va puncta in functie de corectitudinea acesteia.